

Espaces spectraux no-locaux et totalment déconnectés

1

Rappels sur les espaces spectraux

\mathcal{J} = espaces spectraux + applications \mathcal{C}^0 spectrales ↖ qc

\cup
espaces profinis = espaces spectraux Hausdorff

* X spectral $\quad X \xrightarrow{\pi} \underbrace{\pi_0(X)}_{\text{profini}}$

$$\pi^{-1}(c) = \text{Composante Connexe} = \bigcap_{\substack{U \ni c \\ U \text{ o/f}}} \pi^{-1}(U) = \bigcap \text{ouverts/fermés}$$

$$= \text{fermé généralement}$$

i.e. stable par généralisation

$\mathcal{J} = \overline{\text{pro-ct}} \quad \varprojlim \text{ TO-finis}$

Ensembles ordonnés finis (ordre = relation de spécialisation)

$$X = \varprojlim X_i \quad \pi_0(X) = \varprojlim \pi_0(X_i)$$

* $\{\text{Constructibles}\} = \text{alg. de Boole engendrée par les ouverts qc}$
 $\text{pro-cms} = \bigcap \text{Constructibles}$

$X_{\text{Cons}} = X + \text{top. Constructibles} = \text{Compact tot. discontinu} = \text{profini.}$

$X_{\text{Cons}} = \varprojlim_i \coprod_i Z_i \quad \left] \rightarrow \text{force les stratifications Constructibles à être disjointes topologiquement.} \right.$

\varprojlim_i
partition constructible de X

$$X = \varprojlim_i \underbrace{X_i}_{\text{TO-fini}} \quad X_{\text{Cons}} = \varprojlim_i X_i^{\text{disc}}$$

Ex: * Tout fermé est pro-cons

\equiv

* $k \in X \quad X^{\geq k} = \{y \in X / y \geq k\} = \bigcap_{U \text{ ouvert } q_c, k \in U} U = \text{pro-cons.}$

$\{ \text{gén. de } k \} = \text{"localisé de } X \text{ en } k \text{"}$

* pro-cons. généralisant $\Leftrightarrow \bigcap$ ouverts q_c

\uparrow si $A \subset X$ constructible

* $k \in X \quad \text{Int}(A) = \{k \in A / \forall y \geq k, y \in A\}$

$\text{Int}(A) = \text{pro-cons} = X^{\geq k} \cap \overline{A}$

* $f: X \rightarrow Y$ dans $J \quad \text{Im } f = \text{pro-cons.}$

De plus $Z \subset X$ pro-cons $\Rightarrow Z$ spectral.

En fait si $Z \subset X$, Z spectral et $Z \hookrightarrow X$ $q_c \Leftrightarrow Z$ pro-cons.

i.e. $\left[\text{"pro-cons} = \text{sous-espaces spectraux"} \right]$

Espaces spectraux totalement ~~discontinus~~ ^{discontinus}

2

Comp. Connexes = fermés généralisants

⇓
possède toujours
un point fermé

⇓
la bonne notion de discontinuité n'est pas
toute Comp. Connexe est réduit à un point.

Def: X spectral est totalement discontinu si toute composante
Connexe possède un unique point fermé.

i.e. $\forall C$ Comp. Connexe $\exists x \in C$ tq. $C = X^{\geq x}$
↳ forcément unique

Ex: $X = \text{Spec}(A)$, $C = \varprojlim_{\substack{U \supset C \\ \sigma/f.}} U = \text{Spec}(A_C) \xrightarrow{\text{pro. étale}} \text{Spec}(A)$

X tot. discontinu $\Leftrightarrow \forall C$ A_C est un anneau local.

* $X^c = \{\text{pt. fermés de } X\}$

Lemme: $X^c \xrightarrow{\pi|_{X^c}} \pi_0(X)$ est un homéo.

dem. $Z \cap X^c$ fermé de X^c avec Z fermé de X

$\pi(Z \cap X^c) = \pi(Z)$ car si $z > z'$ alors $\pi(z) = \pi(z')$

= fermé car pro-Connex stable par spécialisation \square
 π spectral $\pi_0(X)$ Hausdorff.

$$\Rightarrow X^c = \text{profini} \subset X$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(X) \xleftarrow{\sim} X^c \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & X^c
 \end{array}$$

π retraction \mathcal{C}^0 de X sur X^c
 $\pi^{-1}(x) = X^{\geq k}$

⚠: En général X^c n'est pas fermé m̃ si profini comme B. espace de X .

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\} \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\xi} \mid \xi > 0 \right\} \text{ avec } \xi > 0 \text{ base de voisinages de } \xi$$

$$\left(\xi \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq b \right\} \right)_{b \geq 1}$$



Lemme: Soit \sim :
 * X^c est fermé
 * L'inclusion $X^c \hookrightarrow X$ est qc

dem.: X^c spectre car profini. Il est de plus stable par spécialisation.

$$X^c \hookrightarrow X \text{ spectrale} \Leftrightarrow X^c \text{ pro-cns} \Leftrightarrow X^c \text{ est fermé.}$$

En précédent $X \setminus \{0\}$ qc $X \setminus \{0\} \cap X^c = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\}$ pas qc.

Def. X est w -local si tot. discontinu et X^c est fermé.

J^{prol} = espaces spectraux w -locaux + morphismes locaux
 analogue morphismes locaux d'anneaux locaux.
 $f: X \rightarrow Y$ q. $f(X^c) \subset Y^c$

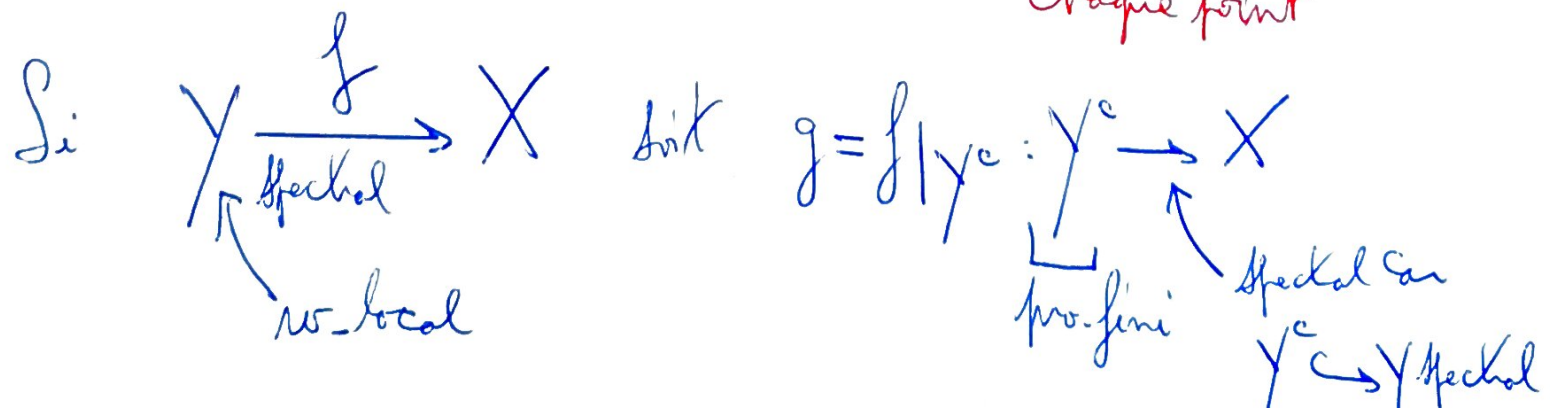
Prop. L'inclusion $J^{prol} \hookrightarrow J$ possède un adjoint à droite
 $X_l \mapsto X^{prol}$

$$\lim_{\leftarrow} X_i^{prol} = \lim_{\leftarrow} X_i$$

ms $J = 2\text{-}\lim_{\leftarrow} \text{To-finis} \Rightarrow$ il suffit de construire X^{prol} pour X To-fini. i.e. $X =$ ensemble ordonné fini.

On pose alors $X^{prol} = \coprod_{x \in X} X^{\geq x}$

"on remplace X par l'union disjointe de ses localités en chaque point"

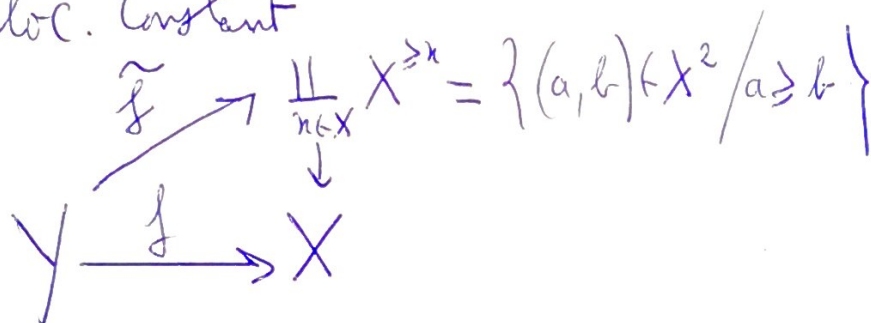


g spectral $\Rightarrow \forall x \in X$ $g^{-1}(X^{\geq x})$ et $g^{-1}(X^{> x})$ ouverts qc
 de $Y^c \Rightarrow$ ouverts/fermés de Y^c

$\Rightarrow g^{-1}(x) = g^{-1}(X^{\geq x}) \setminus g^{-1}(X^{> x})$ ouvert/fermé de Y^c

$\Rightarrow g$ loc. constant

\Rightarrow factorisation

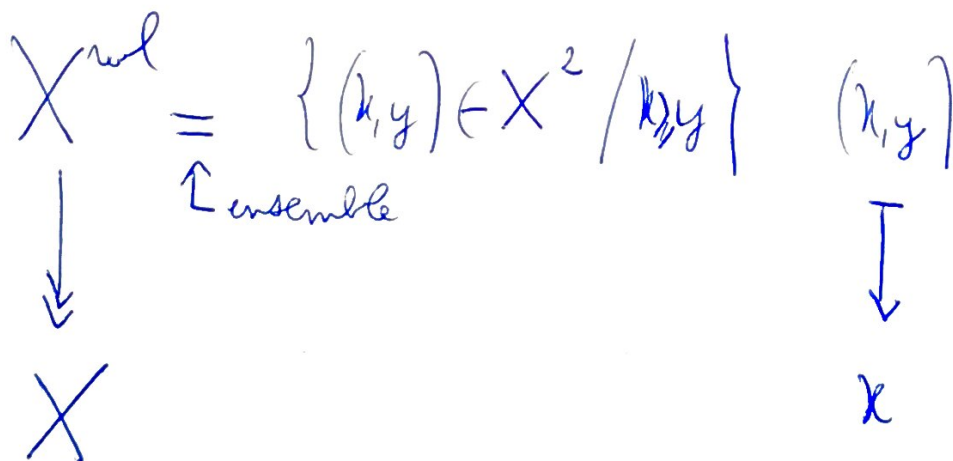


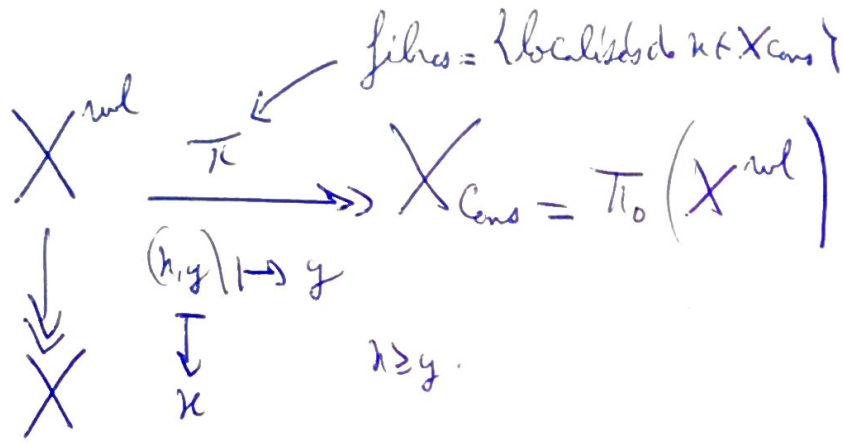
où $\tilde{f}(y) = (f(y), f(r(y)))$

$r: X \rightarrow X^c$ rétraction.

□

* construction précédente $\Rightarrow \forall X \in \mathcal{I}$





X^{red} = fibré au dessus de $X_{\text{cons}} = X$ rendu profini, fibre = localisé

* Formule générale { généralisations de Z_i }

$$X^{\text{red}} = \varprojlim_{\substack{(Z_i)_i \\ \text{strat. constructible}}} \coprod_i \widetilde{Z}_i \xrightarrow{\pi} \varprojlim_{(Z_i)_i} \coprod_i Z_i = X_{\text{cons}}$$

Caractérisation des espaces totalement discontinus en termes de recouvrements

i.e. $\exists (V_i)_i, V_i \subset U_i, X = \coprod_i V_i$

Prop. X spectral. Sont \sim :

- (i) X ht. discontinue
- (ii) $\exists (U_i)_i$ recouvrement de X alors $\coprod_i U_i \rightarrow X$ est séché
- (iii) $\forall \mathcal{F}$ fsc. de gp. ab. sur X est acyclique: $\forall i > 0, H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

→ (ii) ⇒ (i) $C =$ Composante Connexe de X

La pté (ii) se transfère à tout fermé de X et en particulier à C

Si $x, y \in C$ sont deux points fermés distincts

$$C = C \setminus x \cup C \setminus y \quad \text{recouvrement séparable}$$

⇓

$$C = U \sqcup V \quad \text{avec } x \notin U \Rightarrow V \neq \emptyset$$

$$y \notin V \Rightarrow U \neq \emptyset$$

Impossible car C Connexe.

$$(ii) \Rightarrow (iii) \quad \text{Cech} \Rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) = 0.$$

$$\text{Vrai } \forall \mathcal{F} \Rightarrow \Gamma(X, -) \text{ exacte}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \text{ est acyclique.}$$

$$(iii) \Rightarrow (ii) \quad X = \bigcup_i U_i \quad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ épimorphisme}$$

$$+ \Gamma(X, -) \text{ exacte} \Rightarrow 1 = \sum_i f_i \quad f_i = X \rightarrow \mathbb{Z}$$

loc. constant

$$V_i = \text{supp}(f_i) \subset U_i$$

□
ouvert/fermé

$$\Downarrow$$

$$X = \bigcup_i V_i$$

$i = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} W_i = V_i \setminus \bigcup_{j>i} V_j = \text{ouvert/fermé} \\ X = \bigsqcup_i W_i, \quad W_i \subset U_i \end{cases}$$

(i) \Rightarrow (iii) $\pi_0(X)$ profini \Rightarrow tout faisceau sur $\pi_0(X)$ est acyclique

$$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = \Gamma(\pi_0(X), R^i_{\pi_*} \mathcal{F}) \quad \pi: X \rightarrow \pi_0(X)$$

$$(R^i_{\pi_*} \mathcal{F})_c = \varinjlim_{\substack{U \ni c \\ \text{o/f}}} H^i(\pi^{-1}(U), \mathcal{F}_U)$$

$$\varprojlim_{\substack{U \ni c \\ \text{o/f}}} \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(c)$$

\leftarrow \varprojlim Spectres d'espaces spectraux

$$= H^i(\pi^{-1}(c), \mathcal{F}_c)$$

\uparrow Coh. d'une \varprojlim spectrale de Spectres.

$x_c \in \pi^{-1}(c)$ l'unique point fermé de $\pi^{-1}(c)$

Si $\pi^{-1}(c) = \bigcup_i U_i$ rec. ouvert $\exists i_0$ tq, $x_c \in U_{i_0}$

et alors $\{\text{géné. de } x_c\} \subset U_{i_0}$

$\Rightarrow U_{i_0} = \pi^{-1}(c) \Rightarrow$ tout rec. est scindé $\Rightarrow H^i(\pi^{-1}(c), \mathcal{F}) = 0 \quad \square$